Debates em Educação

Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE)
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

ISSN Eletrônico 2175-6600

Vol. 10 | Nº. 22 | Set./Dez. | 2018

Rozelaine de Fatima Franzin

Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI)

rozelaine@santoangelo.uri.br

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DA TEORIA FRACTAL E O SOFTWARE GEOGEBRA

RESUMO

A aplicação da Teoria Fractal está sendo difundida em muitas áreas, entre elas, na de matemática onde permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria dos objetos não tradicionais, estabelecendo modelos matemáticos que ajudam a entender diversos fenômenos naturais. Este estudo tem como objetivo relacionar a Teoria Fractal e a Geometria Euclidiana aliada com o software *Geogebra* para o ensino de conceitos básicos da matemática. Podendo ser desenvolvida e aplicada em sala de aula, oportunizando aos alunos um amplo conhecimento na resolução e ilustração de cálculos matemáticos que envolvam comprimentos, perímetros e áreas de figuras geométricas, bem como a relação com as diversas áreas em que ela está inserida. Possibilita também ao aluno participar de forma mais efetiva no processo de aprendizagem, partindo-se do pressuposto que o professor deva ser um mediador nesse processo e o aluno mais atuante e colaborador de sua aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino. Geometria. Software Geogebra. Teoria Fractal.

GEOMETRY EDUCATION PROPOSAL THROUGH FRACTAL THEORY AND GEOGEBRA SOFTWARE

ABSTRACT

The application of Fractal Theory is widespread in many areas, including mathematics, where it allows students to develop their experimental spirit in order to understand the geometry of non-traditional objects, establishing mathematical models that help understand various natural phenomena. This study aims at relating the Fractal Theory and Euclidean Geometry allied with Geogebra software for the teaching of basic concepts of mathematics. It can be developed and applied in the classroom, giving students a broad knowledge in the resolution and illustration of mathematical calculations involving lengths, perimeters and areas of geometric figures, as well as the relation with the various areas that it is inserted. It also enables the student to participate more effectively in the learning process based on the assumption that the teacher should be a mediator in this process and the student more active and collaborative in his/her learning.

Keywords: Teaching. Geometry. Geogebra Software. Fractal Theory.

Submetido em: 25/06/2018
Aceito em: 21/10/2018
Publicado em: 21/12/2018

DOI: 10.28998/2175-6600.2018v10n22p89-106

1 INTRODUÇÃO

As tecnologias como meio de comunicação e socialização estão cada vez mais presentes, causando impactos na sociedade e influenciando no ambiente escolar. Gerações tecnológicas estão num processo avançado de mudanças que muitas vezes não estão sendo acompanhados pelos professores.

Cabe ao professor fazer com que essa tecnologia, contribua com o processo de ensino e torne a sua prática mais interava e dinâmica. Como resalta Retzlaff *et al*. (2016, p.6), “proporcionar ao aluno experimentar, modificar, e observar os resultados obtidos por meio de modificações e contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico de cada educando.”

Partilhando da ideia de que a interação dinâmica se dá por meio da exploração de situações-problema que envolvam o dia a dia dos alunos, por exemplo, há a possibilidade de produzir novos significados à matemática e que, o uso dos recursos tecnológicos como os *softwares* fazem parte do ambiente escolar e servem de prática educativa relevante. Um desses *softwares* é o *Geogebra*, por ser livre e dinâmico reúne em um só programa ferramentas de cálculo que favorecem o desenvolvimento de tarefas como geometria, álgebra e cálculo. Mas não adianta se ter *softwares* com várias possibilidades de uso se o planejamento do professor não conduzir à produção do conhecimento. Partindo desse pressuposto, esta pesquisa propõe o estudo de geometria por meio da Teoria Fractal aliada ao uso da tecnologia.

Tem como objetivo relacionar a Teoria Fractal e a Geometria Euclidiana aliada ao *software Geogebra,* mostrando a interação entre essas teorias e o meio que nos cerca. Além de demonstrar atividades que podem ser desenvolvidas e aplicadas em sala de aula, oportunizando aos alunos um conhecimento na resolução e apropriação de alguns conceitos matemáticos como comprimentos, perímetros e áreas de figuras geométricas, bem como a relação com as diversas áreas que ela está inserida.

A Geometria Euclidiana é uma das mais belas áreas da Matemática, onde se estudam formas geométricas definidas e indefinidas, bem como suas propriedades, possibilitando construir conceitos matemáticos relacionados a diversas áreas do conhecimento. Durante muito tempo foi considerada a geometria que melhor descrevia o mundo em que se vive, porém, ela não é suficiente para descrever todas as formas e objetos geométricos encontrados na natureza e com a Geometria Fractal consegue-se solucionar problemas que somente com a Geometria Euclidiana não seria possível.

O surgimento da geometria deu-se com os gregos e é na Grécia Antiga que o conhecimento científico teve um grande estímulo, compreender racionalmente a natureza, mas com o passar do tempo surgiu **a** necessidade de se estudar figuras não Euclidianas que representassem formas da natureza, surgindo um novo ramo da matemática que descreve formas estranhas e fragmentadas, originando assim os Fractais. Suas formas irregulares e repetitivas podem ser encontradas nas nuvens, nos troncos das árvores, nos talos dos brócolis e nas formações rochosas das montanhas; até mesmo no ritmo das batidas do coração.

Atualmente a aplicação da Teoria Fractal está sendo difundida em muitas áreas, entre elas, a matemática, que permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria dos objetos não tradicionais, estabelecendo modelos matemáticos que ajudam a entender diversos fenômenos naturais.

Por ser um tema atual e amplo, a exploração dessa teoria permite tornar a aula de matemática um espaço propício para a aprendizagem, unindo aspectos lúdicos com a abordagem de conceitos matemáticos. É possível ainda investigar, a partir de tópicos da matemática tradicional, como na álgebra, geometria, cálculo e contagem numérica, conceitos mais elaborados que podem servir como introdução para outros conteúdos, contribuindo para despertar assim o interesse dos alunos.

Ao se trabalhar com a Teoria Fractal, o professor pode, a partir do uso de recursos tecnológicos, fazer com que o educando visualize melhor as situações apresentadas.

A pesquisa foi motivada pela possibilidade de relacionar a geometria Fractal e Euclidiana para o ensino de conceitos básicos mediados pelo uso do *Software Geogebra,* possibilitando a participação mais efetiva do aluno no processo de aprendizagem. Parte-se do pressuposto de que o professor deva ser um mediador nesse processo e o aluno mais atuante e colaborador de sua aprendizagem.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 A teoria fractal

A Teoria tem função essencial na formação do indivíduo, pois possibilita uma melhor interpretação do mundo em que se vive uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática. É um ramo da Matemática de grande eficiência na conexão didático-pedagógica dos conteúdos, pois os conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas são clarificados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (LORENZATO, 2006).

Se a Geometria Euclidiana nos ajuda a entender o universo, por meio de seu vasto emprego e formulações, a Geometria Fractal nos faz pensar no diferenciado, que a irregularidade não deve ser vista como algo mal feito, mas como uma obra que a natureza nos proporcionou a observar.

Foi da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza que não possuem forma definida, que surgiu a Geometria Fractal, uma geometria que apresenta uma estrutura complexa e indefinida. O termo fractal criado pelo matemático Benoit Mandelbrot, vem do latim "*frangere*" que significa "quebrar" ou "fraturar" e refere-se às características naturais de objetos que parecem quebrados, irregulares, complexos. A partir dos estudos de Benoit Mandelbrot houve o desenvolvimento e a divulgação dessa teoria.

Conforme o estudo sobre a Teoria de Fractais foi avançando, várias definições sobre ela foram surgindo. A definição que se toma por condutora foi a de Benoit Mandelbrot: "Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que sua dimensão topológica" (BARBOSA, 2005, p.18), mas essa definição não foi bem aceita por alguns pesquisadores, além de não satisfazer o próprio Mandelbrot.

Carvalho (2005, p. 18) afirma que "fractal é uma figura geométrica em que cada uma de suas partes se assemelha a toda a figura, obtida por de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira". Esta definição aborda três características: auto-similaridade, iteração e dimensão, que serão explicitadas a seguir:

2.1.1 Auto-similaridade

A auto-similaridade parece ser a característica mais marcante de um fractal. segundo Siqueira (2009), um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior, observando em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar; em uma figura fractal as ampliações sempre se parecem com a original.

Benoit Mandelbrot ilustra a propriedade da "auto-similaridade", arrancando um pedaço de uma couve-flor. Ele repete a demonstração dividindo ainda mais esse pedaço. Desse modo, cada parte se parece com a hortaliça inteira. A forma do todo é semelhante a si mesma em todos os níveis de escala. Segundo Morais (2007, p. 10)

> A propriedade mais notável dessas formas "fractais" é que seus padrões característicos, sua repetição encontrada em escala descendente, de modo que suas partes, em qualquer escala, são na forma, semelhantes ao todo e subdividido indefinidamente em partes.

As formas naturais auto similares, em sua grande maioria, são complicadas de serem descritas apenas nos termos euclidianos fundamentais, como o ponto, a reta ou o plano. Conforme Carvalho (2005) apud Real *et al*. (2015) mesmo sendo intuitiva a auto similaridade pode ser usada para construir figuras complexas que se encaixam, exprimem somente com algumas regras iniciais.

2.1.2 Iteração

Para se ter um fractal é necessário repetir um mesmo ato ou princípio infinitamente, sendo esse processo chamado de iteração. Cada iteração feita será a mesma que a inicial. A iteração é a repetição de um procedimento, consecutivamente.

Segundo Carvalho (2005) quando se fala de processos iterativos dentro da Geometria Fractal, classificam-se as iterações em dois tipos: algébrica e geométrica.

A equação algébrica possibilita a rotina da iteração algébrica como unidade processadora, onde se pode atribuir ao x_n um valor inicial para torná-lo um x_{n+1}. Substituindo x_n por x_{n+1} encontra-se x_{n+2} e assim sucessivamente encontrando a rotina x_{n+3}, x_{n+4}, ...x_{n+m}.

Na iteração geométrica, o processador é uma rotina aplicada em uma figura geométrica ou em alguma parte especifica dela. Geralmente, a regra induz uma quebra na figura e é nessas etapas de fragmentação que será aplicada indefinidamente.

2.1.3 Dimensão

A dimensão de um espaço é o número de parâmetros necessários para identificar um ponto desse espaço. Ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, a quantidade da dimensão na Geometria Fractal não é necessariamente inteira, e sim uma quantidade fracionária. Para Fernandes (2007), a dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade.

Como segue: os pontos possuem dimensão zero; os segmentos de reta possuem dimensão 1; as figuras planas, como o retângulo possuem dimensão 2 e o espaço em que vivemos é de dimensão 3, que se chama dimensão espacial.

Carvalho (2005, p.28) “define como **m** o número de cópias de si mesmo e **n** o valor de cada cópia deve ser ampliada para voltar a ter o tamanho original, pode-se obter a seguinte expressão para calcular a dimensão **d:** $m = n^d$.” Aplicando logaritmo em ambos os lados, temos:

$$d = \frac{\log m}{\log n} \tag{1}$$

2.2 Aplicações da geometria fractal

Nos últimos anos a Geometria Fractal tornou-se um assunto muito difundido em diversas áreas do conhecimento e por isso a sua utilização por meio de tecnologia pode ser ainda mais disseminada. Diz Oliveira (1994, *apud* Real *et al.* 2015, p. 5):

> Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os médicos dá uma nova visão da anatomia interno do corpo. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies caóticas. Um dos mais belos e, sem dúvida o mais colorido é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentados com equações eles criam magníficos desenhos abstratos aos quais chamamos de fractais.

Na Ciência da saúde pode ser encontrada na forma da ramificação nos vasos sanguíneos; na natureza na forma das folhas, caules, rios; na matemática no estudo da geometria, mercado financeiro e assim como em outras áreas do conhecimento.

Sistemas dinâmicos que têm evolução ao longo do tempo podem ser estudados como regra e não como exceção pela Geometria Fractal e por ser qualitativa, consegue descrever fenômenos e visualizar questões globalizadas e contemplar as inter-relações subjacentes, Mandelbrot (1989).

Essa teoria surge para ampliar o leque de construções geométricas e reduzir o formalismo dada na área da matemática. Conforme Real *et al.* (2015, p. 6):

> Existem várias publicações referentes ao uso da geometria fractal como recurso auxiliar para o ensino da Matemática em seus vários níveis. É preciso tomar cuidado com os exageros. A geometria fractal não derruba a geometria euclidiana e sim amplia seus poderes, aumentando o seu alcance.

Consegue-se uma aproximação dos resultados pelo uso da Geometria Fractal quando esse não for alcançado pela Geometria Euclidiana. Muitos problemas relacionados com a natureza podem ser resolvidos mais facilmente pela aproximação dessa teoria do que pela Euclidiana, mas isso não a torna universal e sim mais uma possibilidade de encontrar a solução.

A Geometria Fractal pode ser trabalhada por meio de aplicações como o Floco de Neve de Koch, o Triângulo de Sierpinski, o Tapete de Sierpinski, o Conjunto de Cantor entre outros. Nesse estudo, foram aplicadas atividades usando o Floco de Neve de Koch.

2.3 Tecnologias digitais e o ensino

A evolução dos computadores cada vez mais potentes, velozes, possibilita o acesso às informações em tempo real com uma qualidade cada vez melhor. Toda essa evolução fez com que o homem também entrasse num ritmo acelerado de adaptação e constante atualização dos processos de aquisição coletiva do conhecimento. A inteligência coletiva provém dos processos sociais com apropriação de técnicas por parte de determinados grupos ou indivíduos que interagem entre si e com o meio. O desenvolvimento constante proporciona o crescimento de um ambiente, o ciberespaço, acelerando o processo de mudança.

Para LEMOS (1998), a cibercultura forma-se precisamente da convergência entre o social e o tecnológico, sendo por meio da inclusão da socialidade na técnica que ela adquire seus contornos mais nítidos.

Nesse processo, o homem, a máquina e o conhecimento gerado pela informação, fazem parte de um todo que não podem mais ser desconectados, pois vive-se na era do espaço virtual, que está em toda parte e em qualquer espaço de tempo. Conforme Trivinho (1996, p. 1) A cibercultura "... redefine, rearticula e reescalona, de maneira original, todos os elementos pertencentes à dimensão tecnológica, sociocultural e política da comunicação...". Também Pellanda *et al.* (2000, pp. 41-42) afirma: "as formas técnicas atuais produzem como efeito um movimento de virtualização ou problematização da subjetividade muito mais importantes do que o domínio sobre a matéria que garante a solução a um problema imediatamente dado".

Tais formas seriam a oralidade, a escrita e a tecnologia, que correspondem aos regimes cognitivos formados por regras criadas por práticas concretas. A terceira forma destaca-se pela sua capacidade de virtualizar a inteligência e a possibilidade de que o acesso a ela nos tornem capazes de intervir, interpretar e transformar o mundo. Para Pimentel e Nascimento (2018, p. 156):

> [...] as TIC têm transformado de forma rápida e profunda a maneira como os indivíduos se socializam e se relacionam com o mundo a sua volta. Contudo, observa-se que sua inserção direta no cotidiano tem gerado alguns impactos na dinâmica da escola e seus segmentos, em particular na formação de estudantes e professores para o uso das tecnologias e mídias.

O espaço virtual tornou-se o presente e o futuro na era da comunicação e do pensamento humano, que influencia o trabalho e a cultura das pessoas, mas é na educação que o reflexo disso sofre maior impacto.

Segundo Bittar (2010) os professores devem conhecer as tecnologias disponíveis e estudar suas possibilidades de uso. É mais um recurso didático no processo de aprendizagem, tornando-a mais significativa possibilitando que os alunos possam interagir entre si e com a máquina, construindo conhecimentos. Diz Vilaça (2014, p. 9):

> [...] estudiosos de diferentes áreas apontam que a Educação atual é cercada de novas possibilidades relacionadas ao emprego das tecnologias digitais, mas também de novos desafios, parte destes relacionados à necessidade de desenvolvimento de novas competências e habilidades para os professores.

A cada planejamento, deve-se perceber a presença de objetivos associados a conteúdos a serem trabalhados, cabendo considerar que os alunos aprendem dentro e fora do espaço da sala de aula, sendo necessária a utilização das diversas fontes de informações. Diante disso, é necessário pensar nas atividades de ensino-aprendizagem de forma a explorar conhecimentos prévios, reforçar e construir novos conhecimentos, permitindo ressaltar visualmente tais aspectos com recursos e técnicas adequadas ao propósito da aula, com elementos de participação dos alunos para o compartilhamento de experiências de aprendizagem.

3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento desse estudo foi realizada uma pesquisa bibliográfica para apresentar as relações existentes entre a Teoria dos Fractais e a Geometria Euclidiana. Após a pesquisa bibliográfica, foram construídas as etapas passo a passo do Floco de Neve de Koch por meio do *software Geogebra*, por ser um *software* livre e de fácil manuseio.

A proposta estabeleceu o desenvolvimento de uma oficina para 23 alunos do 2º ano do Ensino Médio matriculados numa Escola Pública. As atividades dividiram-se em 30 horas mensais entre planejamento e execução, sendo que o planejamento das atividades que foram desenvolvidas durou 10 horas mensais e o restante foram absorvidas na execução da proposta em sala de aula e laboratório de informática.

Na primeira etapa de execução, que teve duração de 8h, sendo 4h para explanação do conteúdo a ser trabalhado e 4h para o manuseio do *software Geogebra*, foram abordadas a proposta e os objetivos da pesquisa bem como repassadas questões sobre o plano de atividades que foram desenvolvidas pela professora pesquisadora. Nesse momento, foram trabalhados os conteúdos de forma expositiva, bem como o recurso tecnológico trabalhado na oficina.

Na segunda etapa, foram desenvolvidas as atividades com o uso do *software*

Geogebra e a Teoria dos Fractais por meio de uma oficina com duração de 8 horas divididas em 2 turnos intercalados, 4 horas cada um, no laboratório de informática da escola.

A terceira etapa composta de 4horas refere-se ao trabalho desenvolvido pelos alunos no laboratório, onde foi proposta uma discussão sobre a prática desenvolvida por eles e a validade ou não do uso do software como ferramenta de ensino e aprendizagem do conteúdo proposto.

Em seguida foi aplicado aos alunos um questionário estruturado com 3 perguntas fechadas para coletar informações referentes às atividades desenvolvidas e por fim os resultados obtidos.

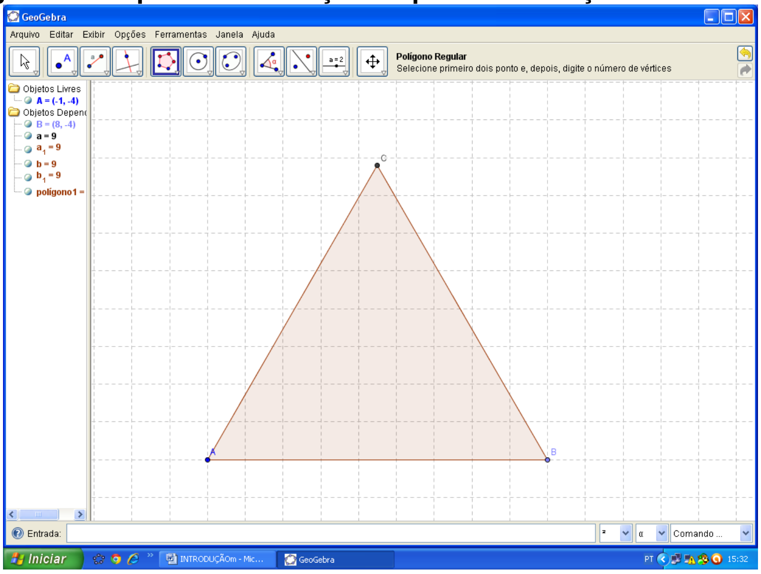
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Iniciou-se a oficina com a apresentação do Floco de Neve de Koch e a abordagem de conceitos como divisão de lados em partes iguais, contagem, medida de segmentos, perímetro e área.

Para a formação do fractal, construiu-se um triângulo isóscele de modo que os lados do mesmo sirvam como base para a construção de três quadrados respectivos e estes lados. Para se obter as iterações fundamentais para este fractal, utilizou-se como recurso tecnológico, o *software Geogebra.* Foram realizadas algumas etapas que serão descritas a seguir:

Iniciou-se com um triângulo equilátero de lado medindo 9 unidades de comprimento. Para sua construção, clicar no botão reta definida por dois pontos e em segmento com comprimento fixo. Clicar no plano cartesiano criando assim o ponto A e digitado na caixa de diálogo que abrir 9. Assim tem-se o segmento AB de comprimento 9. Para fazer o triângulo, clicar no botão polígono e selecionar polígono regular. Clique no ponto A e no ponto B e digite na caixa de diálogo 3 (que é a quantidade de lados do polígono que se quer), conforme a Figura 1.

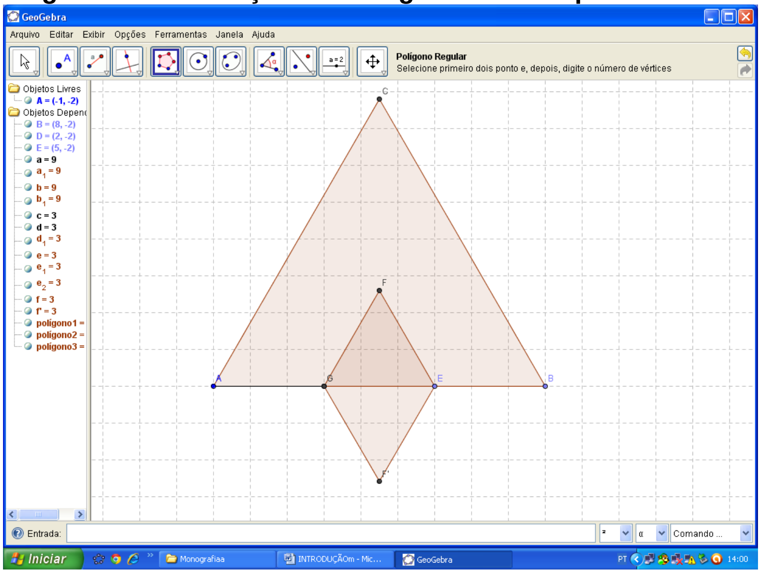
Figura 1 - Triângulo inicial para a construção da primeira iteração do floco de neve de Koch.



Fonte: autora (2016).

Após a construção dessa tarefa pelos alunos, prossegue-se a atividade dividindo-se em 3 partes iguais cada lado do triângulo inicial. Prosseguindo para o botão da reta definida por dois pontos e selecionando o segmento com comprimento fixo. Clicar no vértice A e digitar na caixa de diálogo 3 (como o lado do triangulo é igual a 9 divide-se em 3). Assim, aparecerá a primeira divisão do lado e para a segunda divisão clicar no botão segmento com comprimento fixo, no vértice D e digitar na caixa de diálogo que aparecerá a medida 3. Com a medida do lado do triângulo dividida em 3 partes, selecionar o botão polígono regular e clicar nos vértices D e E e digitar na caixa de diálogo que aparece a medida 3, formando assim o triângulo equilátero. Caso o triângulo menor seja construído dentro do inicial, pode-se usar a ferramenta reflexão com relação a uma reta, clicar no vértice do triângulo menor que está dentro do inicial, depois no lado do triângulo inicial, obtendo o vértice refletido. Proceda com a construção do triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular, clicando no vértice refletido e em um dos pontos D ou E, como na Figura 2.

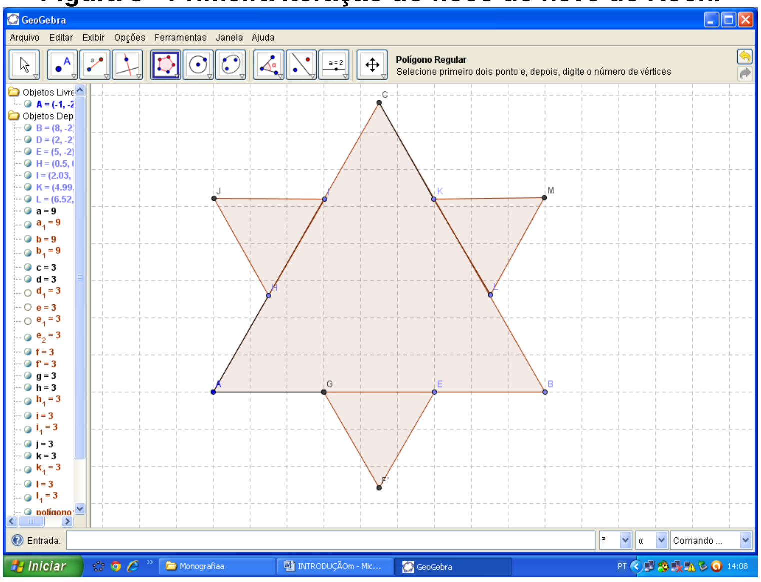
Figura 2 - Construção do triângulo refletido por uma reta.



Fonte: autora (2016).

O aluno é alertado sobre a figura construída e, em seguida, pede-se para esconder o triângulo que está dentro do triângulo inicial. Clicar com o botão direito no triângulo menor e escolha exibir objeto. Aplicar o mesmo procedimento para os outros lados do triângulo inicial, como gerado na Figura 3.

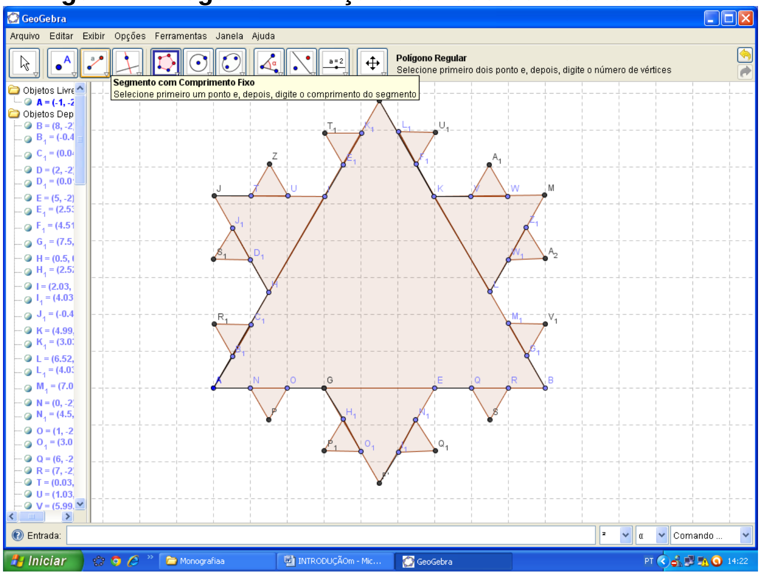
Figura 3 - Primeira iteração do floco de neve de Koch.



Fonte: autora (2016).

Dando continuidade à atividade, o aluno deve proceder da mesma forma como a anterior, sendo encontrado um triângulo equilátero em cada um dos lados externos da Figura 3, obtendo-se assim a Figura 4.

Figura 4 - Segunda iteração do floco de neve de Koch.



Fonte: autora (2016).

O processo pode ser repetido pelo aluno indefinidamente, e, quanto maior o número de iterações, maior o perímetro do Floco de Neve de Koch, mas sendo a sua área limitada.

Após a construção da figura, deve-se levar o aluno a observá-la, levando-o a constatar que o número de lados de cada iteração aumenta em quatro, sabendo-se que o triângulo tem três lados, multiplicando-se por três, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 - Número de lados do floco de neve de Koch.

Passos	Número de lados				
Figura de partida	3	=	3	=	$3x4^{0}$
1	3x4	=	12	=	$3x4^{1}$
2	12x4	=	48	=	$3x4^{2}$
3	48x4	=	192	=	$3x4^{3}$
4	192x4	=	768	=	$3x4^{4}$
5	768x4	=	3072	=	$3x4^{5}$
⋮	⋮	=	⋮	=	⋮
N	3×4^{n}	=	3×4^{n}	=	3×4^{n}

Fonte: autora (2016).

Nesse momento, deve-se indagar o aluno sobre o que está acontecendo com a figura obtida e observar que o número de lados do Floco de Neve de Koch tende para o infinito.

$$N = 3 \times 4^{n} \tag{2}$$

Dando continuidade ao procedimento, demonstrando o que acontece com a medida dos lados e para a obtenção da medida dos lados, dividem-se os mesmos da iteração anterior por três, como indicado na Tabela 2.

Tabela 2 - Medida dos lados do floco de neve de Koch.

Passos	Medida de cada lado				
Figura de partida	9	=	9	=	3^2
1	3	=	3	=	3^1
2	1	=	1	=	3^0
3	$1/3$	=	0,333	=	3^{-1}
4	$1/9$	=	0,111	=	3^{-2}
5	$1/27$	=	0,037	=	3^{-3}
⋮	⋮	=	⋮	=	⋮
N	$(1/3)^n$ x L	=	$(1/3)^n$ x L	=	3^{-n} x L

Fonte: autora (2016).

Outro momento de reflexão e indagação para o aluno, quando deve observar que a medida de cada lado do Floco de Neve de Koch tende para zero:

$$M = 3^{-n} \times L = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times L \qquad (3)$$

O que acontece com o perímetro do Floco de Neve de Koch com as iterações?

Para responder essa pergunta pode-se definir a sucessão dos perímetros P_n por meio das fórmulas (2) e (3):

$$P_n = (2) \times (3) = N \times M = \left(3 \times 4^n\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times L = 3L \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \qquad (4)$$

Quando **n** tende para o infinito, a sucessão P_n tendendo para o infinito, logo se conclui que o perímetro do Floco de Neve de Koch tende para o infinito.

Para o cálculo da área do Floco de Neve de Koch, tem-se L a medida dos lados do triângulo inicial e sua área dada por:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \tag{5}$$

Na primeira iteração acrescentam-se 3 triângulos de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ x L = $\frac{L}{3}$, cuja área é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}x3 = \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}x3 = \frac{\frac{L^2}{9}\sqrt{3}}{4}x3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{36}x3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{12}$, logo, têm-se um acréscimo na área de $\frac{L^2\sqrt{3}}{12}$, ou seja, a área após a primeira iteração será:

$$A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + \frac{L^2\sqrt{3}}{12}$$

A segunda iteração tem 12 novos triângulos de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ x L = $\frac{L}{9}$, cuja área é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}x12 = \frac{\left(\frac{L}{9}\right)^2\sqrt{3}}{4}x12 = \frac{\frac{L^2}{81}\sqrt{3}}{4}x12 = \frac{L^2\sqrt{3}}{324}x12 = \frac{L^2\sqrt{3}}{27}$. Portanto, têm-se um novo acréscimo na área de $\frac{L^2\sqrt{3}}{27}$, ou seja, a área do Floco de Neve após a segunda iteração será:

$$A_2 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + \frac{L^2\sqrt{3}}{12} + \frac{L^2\sqrt{3}}{27}$$

Para definir a área na iteração **n**, basta calcular a soma **n** dos primeiros termos da Progressão Geométrica formada pelas iterações do Floco de Neve de Koch.

O triângulo inicial foi definido com medida 9, então se pode calcular a área do Floco de Neve de Koch após a segunda iteração, que será:

$$A_2 = \frac{L^2x\sqrt{3}}{4} + \frac{L^2x\sqrt{3}}{12} + \frac{L^2x\sqrt{3}}{27}$$

$$A_2 = \frac{9^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9^2\sqrt{3}}{12} + \frac{9^2\sqrt{3}}{27} = \frac{81\sqrt{3}}{4} + \frac{81\sqrt{3}}{12} + \frac{81\sqrt{3}}{27} = \frac{2187\sqrt{3} + 729\sqrt{3} + 324\sqrt{3}}{108} = \frac{3240\sqrt{3}}{108} \cong 51{,}86$$

Pode-se calcular a dimensão do Floco de Neve de Koch, observando que a cada iteração substitui-se um segmento por quatro novos segmentos, onde m = 4 e cada um desses segmentos tem medida $L/3$, logo n =3, pela fórmula (1), tem-se:

$$d_{koch} = \frac{\log m}{\log n} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1{,}26.$$

No primeiro momento, houve um encantamento por parte dos alunos enquanto as figuras estavam sendo construídas, pelas formas obtidas dos fractais conforme aumentavam as iterações. A dimensão do Floco de Neve de Koch, segundo Murr *et al*. (2003), apesar de não ocupar toda a porção do plano que o contém, é necessário mais que uma simples curva para contê-la. A cada iteração nota-se a semelhança com a figura anterior.

No decorrer das atividades, foi observado que poucos alunos apresentaram dificuldades em utilizar o *software* no que se referiu à sequência de comandos para realizar as iterações, pois contaram com apresentação em power point para guiá-los.

Durante a execução das tarefas, os alunos trabalharam de forma colaborativa, auxiliando uns aos outros, tirando dúvidas com os próprios colegas, o que facilitou o passo a passo da construção das figuras geométricas.

Após o desenvolvimento das atividades, os alunos foram convidados a responder um questionário contendo 3 questões referentes ao conteúdo abordado nas atividades e do *software* utilizado.

A primeira questão referiu-se ao conteúdo de Geometria Euclidiana relacionado com a Teoria Fractal e como resultado constatou-se que, dos 23 alunos participantes, 16 responderam que o entendimento do conteúdo proposto ficou mais fácil, iniciando pela contextualização do conteúdo de Geometria Fractal; 1 não respondeu e 6 disseram que ajudou um pouco.

Em relação à segunda questão, se o *software Geogebra* facilitou o entendimento do conteúdo, os 23 alunos responderam que a sua utilização tornou mais fácil a construção das figuras do que se fosse desenvolvida no papel, pois no papel, a medida que as iterações vão aumentando não é fácil encontrar medidas tão precisas como as obtidas com o uso do *software*. E a terceira questão relacionada ao conteúdo da Teoria Fractal, 22 alunos responderam que nunca tinham trabalho com esse assunto e que acharam interessantes, e 1 não respondeu.

Pelas respostas obtidas dos alunos, conclui-se que as atividades propostas atingiram a finalidade de relacionar os conteúdos abordados e o objetivo de que a tecnologia facilita a aprendizagem dos alunos quando bem explorada também foi contemplado.

O questionário não abordou questões referentes ao grau de entendimento sobre a interpretação dos resultados obtidos, mas pela observação feita pela pesquisadora no decorrer da oficina, constatou que no momento da construção das tabelas onde tinham que abstrair das figuras informações que chegavam a uma resposta comum, os alunos demonstraram bastante dificuldade. Em alguns pontos das atividades, principalmente na obtenção da tabela 1, quando o resultado tendia ao infinito e da tabela 2, quando tendia a zero, a pesquisadora teve que fazer indagações e questionamentos para que chegassem aos resultados esperados.

O uso do *software* auxiliou no entendimento de características fundamentais do fractal, como auto similaridade, pois os alunos observaram na sua construção que a parte lembra o todo; a complexidade infinita, pois nas etapas dos fractais poderiam realizar infinitas iterações. Este estudo mostrou ainda, que uma proposta de ensino da Geometria por meio da Geometria Fractal com o auxílio do *software Geogebra* é possível.

5 CONCLUSÃO

Conclui-se que a Teoria Fractal está no meio em que se vive, presente em várias áreas do conhecimento como na matemática, biologia, medicina e em outras tantas. Quando é aplicada em sala de aula, pode tornar as aulas mais interessantes fazendo com que os alunos apreciem ainda mais a matemática. Para Real *et al.* (2015, p. 10):

> O ensino especialmente da matemática, deve ter matizes inovadoras e observar o meio que o cerca. Trabalhar conteúdos relacionados com a natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o aluno e o ajuda na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos. Deixar de usar apenas o quadro, giz e livro didático, e fazer uso de materiais manipuláveis, faz com que o educando concentre-se mais, visualize e compreenda melhor as situações apresentadas.

Com a realização desse trabalho, pode-se dizer que essa teoria ajuda a compreender conteúdos e conceitos matemáticos e que pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino. Quando é inserida por meio de *Software* pode motivar os alunos a querer descobrir mais, além de trazer consigo a diversão, o prazer pelas belas formas que podem apresentar e também pode ser facilitador do processo de construção das figuras geométricas.

O uso desse *software* contribuiu para o desenvolvimento da proposta, pois possui uma interface simples de entendimento e manuseio das figuras geométricas pelos alunos permitindo a exploração de conteúdos e realização de tarefas.

A possibilidade de desenvolver atividades com a Geometria dos Fractais envolvendo conceitos de Geometria Euclidiana, como perímetro, área, comprimento, e a utilização de metodologia adequada para o ensino aprendizagem é viável e o *software Geogebra*, além de otimizar o tempo, contribuiu na visualização, conforme as iterações aumentam e exatidão dos traçados facilitando a compreensão.

A utilização de tarefas diferenciadas aliadas a metodologias adequadas pode contribuir com o ensino e aprendizagem, possibilitando ao aluno ser um agente participativo e mais atuante no processo de aprendizagem. O professor deve observar qual será a melhor forma de exploração desta geometria.

Finalmente, ressalta-se que a pesquisa desenvolvida no ensino da matemática, principalmente, se a mesma for desenvolvida no contexto do cotidiano pode favorecer a aprendizagem dos alunos. Fica a sugestão da aplicação dessa Teoria relacionada a outros conteúdos, como por exemplo, funções, trigonometria, progressão aritmética, progressão geométrica, limites e na estatística.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BITTAR, Marilena. **A Incorporação de um Software em uma Aula de Matemática:** uma análise segundo a abordagem instrumental. In: ALLEVATO, N. S. G.; JANN, A. P. (Org.) Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores. Recife: SBEM, 2010.p. 209–225.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal:** Perspectivas e possibilidades no ensino da Matemática. 2005. Disponível em: http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_hamilton_cunha_de_carvalho.pdf. Acesso em: 13 out. 2017.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. **Fractais**, uma nova visão da Matemática. 2007. Disponível em: http://pt.scribd.com/doc/52248753/MonografiaFractais. Acesso em: 12 abr. 2017.

GEOGEBRA. **Site oficial**: www.geogebra.at/help/docupt_br.pdf.

LEMOS, André. **Ciber-Socialidade:** Tecnologia e Vida na Cultura Contemporânea. 1998.

LORENZATO, Sergio (org). **O laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: autores associados, 2006. Coleção: Formação de Professores.

MANDELBROT, Benoit P. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1989.

MORAIS, Cláucia Cabral. **A Geometria dos Fractais Aplicada na 6ª Série do Ensino Fundamental.** 2007. 90f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2007.

MURR, C. et al. Fractais propriedades e construção. Disponível em: http://gauss.mat.ufpr.br/~karas/geralic2003.pdf. Acesso em: 23 out. 2017.

PELLANDA, N. M. *et al*; PELLANDA, E. C. (ORG) **Ciberespaço:** um hipertexto com Pierre Lévy. Porto Alegre: Artes e Ofícios, 2000.

PIMENTEL, Fernando Silvio Cavalcante; NASCIMENTO, Antonia Eunice de Jesus do. Formação de professores para o uso das Tic nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Debates em Educação**. Vol. 10, nº. 20, Jan./Abr. 2018.

REAL, Luana Pereira Villa; FRANZIN, Rozelaine de Fatima; RETZLAFF, Eliani; PRESTES, Rosangela Ferreira; MANTAI, Rubia Diana. Ensino de estatística por meio da geometria dos fractais. **Anais Ciencitec**, 2015. Disponível em: http://www.santoangelo.uri.br/anais/ciecitec/. Acesso em: 12 jun. 2018.

RETZLAFF, Eliani; PRESTES, Rosangela Ferreira; COSTA, Marcos André; MANTAI, Rúbia Diana; SOARES, Everaldo Golzer; FRANZIN, Rozelaine de Fatima. Melhoria do sistema ask math para o incentivo à metodologia da resolução de problemas. **Anais** ENEM, São Paulo–SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: http://sbem.bruc.com.br/xiienem/. Acesso em: 30 maio 2018.

SIQUEIRA, R. **Introdução aos fractais**. 2009. Disponível em: http://www.insite.com.br/fratarte/artigos.php. Acesso em: 04 fev. 2017.

TRIVINHO, Eugênio. **Epistemologia em ruínas:** a implosão da Teoria da Comunicação na experiência do cyberspace. 1996.

VILAÇA, Márcio Luiz Corrêa. Educação, tecnologia e cibercultura**:** entre impactos, possibilidades e desafios. Revista **UNIABEU**. Belford Roxo, v.7, nº 16, maio- agosto 2014.