Debates em Educação

Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE)
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

ISSN Eletrônico 2175-6600

Vol. 10 | Nº. 22 | Set./Dez. | 2018

Beatriz dos Santos Alves
Universidade de Évora (UÉ – Portugal)
beatrizsantosalves3@gmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora (UÉ – Portugal)
apc@uevora.pt

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE JOVENS CRIANÇAS: POTENCIALIDADES DA EXPLORAÇÃO DE PADRÕES, NO CONTEXTO DO ENSINO EXPLORATÓRIO DA MATEMÁTICA

RESUMO

Este estudo, desenvolvido como Design Research, analisa em que medida o trabalho com padrões pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de jovens alunos. Para tal, concebemos uma experiência de ensino com recurso a padrões de repetição que concretizamos com uma turma de alunos, com seis anos de idade, seguindo o ensino exploratório da Matemática. Concluímos que o trabalho com padrões apoia o desenvolvimento do pensamento algébrico, favorecendo o estabelecimento de relações entre variáveis e o uso de símbolos. No entanto, o sucesso da generalização é influenciado pelas características do padrão relativamente à complexidade do motivo. Sublinhamos a importância da metodologia de trabalho na aula, em especial o foco na comunicação pelos alunos, apoiada por um diálogo inquiridor.

Palavras-chave: Educação matemática. Pensamento algébrico. Padrões. Ensino exploratório da Matemática.

DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC THINKING OF YOUNG CHILDREN: POTENTIALITIES OF THE EXPLORATION OF PATTERN IN THE CONTEXT OF EXPLORATORY TEACHING OF MATHEMATICS

ABSTRACT

This study, developed as Design Research, examines the extent to which working with pattern can contribute to the development of algebraic thinking of young students. In order to do this, we conceived a teaching experience using repetition patterns that we made with a group of students of six years old, following the exploratory teaching of Mathematics. We conclude that working with patterns supports the development of algebraic thinking, favoring the establishment of relationships between variables and the use of symbols. However, the possibility of generalization is influenced by the characteristics of the pattern relative to the complexity of the motif. We underline the importance of the methodology of work in the classroom, especially the focus on communication by the students, supported by an inquiring dialogue.

Keywords: Mathematics education. Algebraic thinking. Patterns. Exploratory teaching of Mathematics.

Submetido em: 16/07/2018
Aceito em: 23/10/2018
Publicado em: 21/12/2018

DOI: 10.28998/2175-6600.2018v10n22p247-270

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir dos primeiros anos de escolaridade, constitui uma tendência curricular do ensino da Matemática que tem vindo a ser enfatizada desde o final do século XX (GOLDENBERG, MARK; CUOCO, 2010; NCTM, 2007; PONTE *ET AL*., 2007). Como muitos autores referem, não se trata de antecipar o ensino da Álgebra formal, mas sim de proporcionar aos alunos o desenvolvimento de uma experiência matemática, na qual têm oportunidade de lidar, desde cedo, com os elementos principais da atividade algébrica, o que lhes proporcionará não só ter uma experiência matemática genuína, como formar bases para a posterior aprendizagem da Álgebra (KAPUT, 1999; NCTM, 2007; PONTE, 2006). Mais do que a manipulação algébrica, o coração da Álgebra é lidar com a generalização, independentemente de como esta é expressa, sem necessariamente recorrer à artilharia simbólica (CANAVARRO, 2009; KIERAN, 2007). Com essa perspectiva, é possível que as crianças explorem situações em que, atribuindo significado ao que fazem, identifiquem o que varia e o que se mantém, compreendam relações, reconheçam regularidades, façam previsões, estabeleçam generalizações (BLATON; KAPUT, 2005; NCTM, 2007).

Um dos recursos com inúmeras potencialidades para desenvolver o pensamento algébrico são os padrões, entendidos como sequências estruturadas nas quais existe algum tipo de regularidade (VALE, PALHARES, CABRITA; BORRALHO, 2006; VALE, 2012). A sua utilização no ensino da Matemática permite aos alunos descobrir relações, fazer previsões e generalizações (VALE, 2012; SMITH, 2003). Vários autores referem o seu potencial na compreensão da noção de variável (CANAVARRO, 2009; SMITH, 2003). No entanto, esse recurso continua a ser muito subaproveitado, no trabalho com as crianças. Por exemplo, nos manuais escolares do 1.º ciclo em Portugal, os padrões surgem frequentemente, como simples exercícios para completar, nos quais o foco é o reconhecimento da regularidade apresentada e o desenho e/ou pintura de alguns elementos em falta. Esta é uma abordagem muito redutora da exploração de padrões.

A presente investigação pretende analisar em que medida o trabalho com padrões pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de jovens e crianças. Para tal, concebemos e concretizamos uma experiência de ensino com recurso a padrões de repetição, com uma turma de 1.º ciclo de escolaridade do ensino básico e, relativamente a estes alunos, pretendemos responder às seguintes questões:

- Que aspectos do pensamento algébrico revelam os alunos ao trabalhar com padrões?
- Que características dos padrões parecem ser relevantes no sucesso dos alunos?
- Que características da dinâmica da aula têm influência positiva no sucesso da exploração de padrões, pelos alunos?

Estando os padrões tão presentes em inúmeras situações do dia a dia, sendo acessíveis, desde cedo, às crianças e podendo ser mobilizados para as salas de aula, é relevante conhecer, em concreto, como melhor explorá-los. Além disso, a investigação no contexto de experiência de ensino com padrões pode fornecer pistas para a sua utilização pedagógica, para uma regulação fundamentada das tarefas a propor e das formas de trabalho a implementar, com vista ao desenvolvimento bem sucedido do pensamento algébrico.

2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1 O conceito de pensamento algébrico

Existe uma visão prevalecente redutora associada à Álgebra que a associa sobretudo à resolução de equações, no contexto estrito da Matemática ou resultantes de *word problems* (KAPUT, 1999), em que sobressai como essencial a manipulação simbólica (PONTE, 2006). No entanto, a Álgebra “não é somente um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas” (KIERAN, 2007, p.5). Kaput (2008) refere que o pensamento algébrico apresenta dois aspetos essenciais: descobrir a generalização implícita numa situação e conseguir a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais. Assim, a atividade de generalização é o essencial da Álgebra e é nela que se ancora o pensamento algébrico. O essencial não reside em como esta se expressa, mas sim o raciocínio que convoca (KIERAN, 2007). Kaput, Blanton e Moreno (2008) destacam que no centro do pensamento algébrico estão os significados, valorizando precisamente o raciocínio e a compreensão que é própria de uma abordagem mais conceptual e menos procedimental da Matemática. Blanton e Kaput (2005) acrescentam que as generalizações dos alunos se concretizam através de discurso argumentativo e são expressas de modo ajustado à sua idade, com uso progressivo do formalismo.

Embora os símbolos constituam um elemento essencial do trabalho em Álgebra (ARCAVI, 2006; SMITH, 2003), esta não se esgota neles, nem mesmo, sequer, se define à sua custa. A utilização de símbolos constitui um meio para representar ideias que devem resultar do raciocínio com compreensão. Não basta olhar os símbolos, é preciso olhar através dos símbolos (KAPUT, BLANTON; MORENO, 2008). O uso dos símbolos é requerido com significado, nomeadamente para representar uma situação de partida, para obter um resultado e para o interpretar (ARCAVI, 2006; VALE, 2012). Arcavi (2006) refere-se ao conceito de “symbol sense” como a compreensão com significado da representação de ideias gerais, propondo que os símbolos convencionais da Matemática possam ser abandonados em detrimento de outra representação, caso não sejam compreendidos.

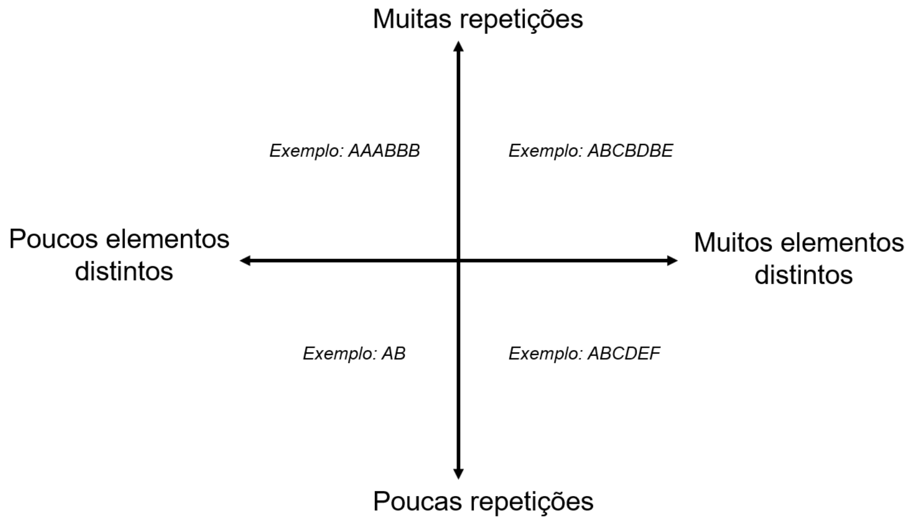
2.2 O conceito de padrão e estratégias para a sua exploração

Os padrões correspondem a um poderoso recurso para o desenvolvimento do pensamento algébrico (SMITH, 2003) e, por isso, aqui os convocamos. O conceito de padrão é transversal aos mais diversos campos da Matemática, adquirindo características e propriedades próprias, conforme a área da Matemática em que está envolvido (PONTE, 2009). Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2006) associam o conceito de padrão “a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades” (2006, p.1). Por sua vez, Smith (2003) refere que a ideia fundamental de padrão está relacionada com a mudança ou a repetição, salientado a importância do que se repete.

De acordo com Vale e Pimentel (2011/2010) e Vale (2012), existem dois tipos distintos de padrões: os padrões de repetição e os padrões de crescimento. Por padrão de repetição entende-se aquele em que é possível identificar um motivo regular, ou seja, “um grupo de repetição (…) que se repete de forma cíclica indefinidamente” (VALE; PIMENTEL, 2010, p. 110). Já os padrões de crescimento são aqueles em que existe uma lei de formação em que é possível identificar “cada termo de forma previsível em relação ao anterior”, prolongando-se o padrão pela aplicação sucessiva dessa lei (VALE, 2012, p. 186).

Neste artigo iremos utilizar a definição de padrão de repetição proposta por Vale e Pimentel (2010), adotando “termo” para os sucessivos elementos ordenados do padrão e “motivo” para o grupo de repetição. Salientamos que o motivo poderá ser composto de diferentes modos, quer no que diz respeito ao número de elementos que o compõem, quer relativamente à forma como surgem as repetições desses elementos, que podem ser simples ou complexas, repetindo elementos e em diversas ordens. Ponte (2009) organiza os padrões de repetição por padrões com uma unidade simples ou composta. A este propósito, neste artigo propomos uma categorização das características dos motivos dos padrões de repetição (Figura 1), distinguindo diferentes tipos de motivos em função do número de elementos distintos que compõem o motivo (poucos: 2 ou 3) e da tipologia das repetições presentes no motivo. Um maior grau de complexidade do padrão estará associado a motivos com muitos elementos distintos que se repetem diversas vezes, enquanto um menor grau de complexidade do padrão ficará associado a motivos constituídos por um número reduzido de elementos e com repetições simples.

Figura 1 - Características do motivo em padrões de repetição



Fonte: elaboração própria.

2.3 Os padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Os padrões convidam os alunos a descobrir relações, fazer previsões e encontrar generalizações (CANAVARRO, 2009; VALE, 2012; VALE; PIMENTEL, 2011), aspetos essenciais do pensamento algébrico (NCTM, 2017). A descoberta de termos numa sequência é considerada um dos primeiros passos para chegar à Álgebra (VALE *ET AL*., 2006), bem como a descoberta de diferentes variáveis que podem representar cada termo do padrão, assim como o número de ordem respectivo (CANAVARRO, 2009).

No trabalho com padrões podem considerar-se dois tipos de generalização: a generalização próxima e a generalização distante (VALE, 2012). A generalização próxima ocorre quando se determinam termos próximos dos que já são conhecidos, que podem ser obtidos por desenho e contagem direta ou com apoio de relações recursivas. A generalização distante envolve a descoberta de termos distantes, sendo favorecida pela compreensão da lei de formação do padrão pois uma estratégia recursiva não produziria resultados ou poderia ser ineficaz (VALE, 2012; VALE & PIMENTEL, 2011).

O trabalho com padrões favorece igualmente o desenvolvimento do sentido de símbolo. A realização de tarefas que envolvam o estudo de padrões e regularidades ajudam os alunos a compreenderem a noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido (SMITH, 2003; VALE, 2012). Contudo, importa referir que nos padrões os números podem surgir com diferentes funções, nomeadamente como constituintes de um padrão numérico, correspondendo aos termos do padrão, ou referindo-se às posições ordenadas que cada termo do padrão ocupa.

2.4 Dinâmica de exploração dos padrões em sala de aula

A exploração dos padrões em aula com os alunos requer tarefas que retirem deles o seu potencial algébrico. Sendo as tarefas um elemento central do desenvolvimento da atividade matemática dos alunos, é importante cuidar que sejam adaptadas aos alunos e os levem a raciocinar sobre os padrões, com perguntas desafiantes, que convoquem os seus significados e explicações, e possam suscitar diferentes aspetos do pensamento algébrico (CANAVARRO, 2009). Através de tarefas de natureza investigativa e exploratória que envolvam a exploração de padrões, os alunos podem alcançar a generalização através de situações concretas (BORRALHO; BARBOSA, 2009).

Para além das tarefas, o professor tem de acautelar uma dinâmica de aula que proporcione experiências de aprendizagens válidas aos seus alunos, em que estes possam refletir (PONTE, 2005). O ensino exploratório da Matemática (Canavarro, 2011) considera os alunos como protagonistas do seu próprio desenvolvimento e aprendizagem, valorizando o seu papel na resolução autônoma de tarefas de natureza problemática e na partilha das suas resoluções em grande grupo, a discutir em plenário para confronto e apreciação da validade e eficácia, e como ponto de partida para a sistematização de conceitos e sua formalização (PONTE, 2005). Uma aula típica de ensino exploratório é constituída por quatro fases: inicia-se com o lançamento da tarefa aos alunos, seguida do trabalho autônomo destes, para produção de resoluções, seguida da respectiva discussão e finaliza-se com a sistematização de aprendizagens que se tornam patrimônio de todos os alunos (CANAVARRO, OLIVEIRA; MENEZES, 2014).

De especial relevo no ensino exploratório é a comunicação entre os alunos e entre estes e o professor, que ganha em ser suportada por questões que criem uma cultura de aula inquiridora (NCTM, 2017). As explicações que os alunos produzem das suas resoluções precisam de ser compreendidas pelo professor e pelos colegas, sendo o convite a responder a perguntas bem focadas e que suscitem o raciocínio e promovam a reflexão, uma constante que o professor não deve descurar.

3 METODOLOGIA

3.1 Opções metodológicas

Esta investigação desenvolveu-se no quadro metodológico de Design Research (GRAVEMEIJER; COBB, 2013), concretizando-se com uma experiência de ensino no contexto real de ensino e aprendizagem (PLOMP, 2013). A sua conjectura de conteúdo é de que os padrões de repetição são recursos favoráveis ao desenvolvimento de diversos aspetos do pensamento algébrico pelos alunos. A sua conjectura pedagógica é de que o ensino exploratório da Matemática constitui um contexto favorável de trabalho, para que os alunos possam dar sentido ao trabalho que fazem sobre padrões e, consequentemente, desenvolvam o seu pensamento algébrico.

A experiência de ensino foi conduzida pela primeira autora deste artigo, em 2014/2015, numa escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico, localizada numa cidade portuguesa, com uma turma de 1.º ano de escolaridade, constituída por vinte alunos com seis anos de idade. A turma em questão era muito dinâmica, constituída por alunos bastante participativos que gostavam de partilhar as suas ideias e conhecimentos, bem como de trabalhar em grupo. Os alunos evidenciaram ao longo da experiência um enorme gosto pela descoberta, mostrando-se empenhados nas diversas atividades que lhes eram propostas.

A experiência de ensino desenvolvida implicou a planificação e condução de uma sequência de tarefas, especialmente concebidas e preparadas com a intenção de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, com base na exploração de padrões de repetição, que consideramos adequados à faixa etária dos alunos. As tarefas apresentaram, progressivamente, oportunidades gradualmente acrescidas de desenvolvimento dos diferentes aspetos do pensamento algébrico e de utilização de estratégias diversificadas, na abordagem aos padrões. Os padrões considerados foram distintos no que diz respeito aos motivos que envolviam e à forma como eram apresentados aos alunos.

As tarefas propostas foram implementadas, através da adoção da metodologia de ensino exploratório da Matemática (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2005). Após a realização autônoma, pelos alunos, das tarefas propostas, valorizaram-se os momentos de reflexão e discussão coletiva, em grande grupo, tendo as aulas adotado uma organização em quatro fases: 1.ª introdução da tarefa à turma; 2.ª desenvolvimento da tarefa pelos alunos; 3.ª discussão das resoluções dos alunos; e 4.ª sistematização das aprendizagens matemáticas (CANAVARRO, OLIVEIRA; MENEZES, 2014).

3.2 Tarefas analisadas neste estudo

Ao longo do estudo foram desenvolvidas com os alunos uma sequência de nove tarefas, que se apresentam no Quadro 1.

Quadro 1 - Tarefas de investigação em 1.º Ciclo do Ensino Básico.

#	Tarefa	Calendarização
1	Quadradinhos azuis e vermelhos	10/11/2014
2	A música e os padrões	14/11/2014
3	A minhoca	18/11/2014
4	Adivinha! Triângulo ou quadrado?	19/11/2014
5	Meninos e Meninas	26/11/2014
6	Descobrir o motivo	03/12/2014
7	Azulejos da cozinha	04/12/2014
8	Os acessórios da Dona Antónia	12/12/2014
9	Construção de padrões natalícios	16/12/2014

Fonte: Alves (2015, p. 52)

Neste artigo selecionamos três tarefas para apresentação detalhada de dados que providenciam evidências sustentadas para as conclusões do estudo, tendo em conta as questões de investigação previamente consideradas. A seleção recai sobre as tarefas 6, 8 e 9, com características distintas, e realizadas numa fase adiantada da experiência de ensino, o que permite maior consistência dos desenvolvimentos revelados pelos alunos.

3.2.1 Tarefa: Descobrir o motivo

Esta tarefa baseia-se na análise da estrutura de um padrão previamente facultada aos alunos. Tinha como objetivos proporcionar aos alunos:

- Descobrir motivos que se adequem a uma estrutura dada de um padrão;
- Descobrir termos distantes do padrão construído sem recorrer ao desenho;
- Justificar e explicar as estratégias utilizadas;
- Discutir sobre as soluções encontradas.

3.2.2 Tarefa: Azulejos da cozinha

Esta tarefa baseia-se na análise de um padrão relativo a um friso de azulejos de cozinha, permitindo aos alunos constatar a presença de padrões na sua realidade próxima. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos conseguissem:

- Resolver problemas utilizando variadas estratégias;
- Identificar o motivo do padrão;
- Investigar e descobrir o número de repetições dos diferentes elementos do padrão e o número de repetições do motivo;
- Explicar e justificar as relações e as generalizações encontradas;
- Discutir acerca das soluções encontradas.

3.2.3 Tarefa: Construção de padrões natalícios

Esta tarefa é contextualizada no Natal, e convida os alunos à construção criativa de padrões com figuras representativas da época natalícia. Tinha como objetivos proporcionar aos alunos:

- Construir padrões com elementos natalícios;
- Escolher os elementos desejados para construir o padrão;
- Escolher o motivo do padrão e o número de vezes que este se repete;
- Encontrar o número de elementos diferentes, necessários para construir o padrão desejado;
- Explicar e justificar as relações e as generalizações encontradas.

3.3 Recolha e análise de dados

A recolha de dados foi feita através das técnicas de observação e análise documental (CRESWELL, 2003). A observação foi efetuada de forma direta, observando os comportamentos dos alunos, individualmente e em grupo, e os seus processos de comunicação. Os instrumentos para a recolha de dados foram um diário de bordo, fotografias e vídeos. A análise documental foi usada para aceder a dados das produções escritas dos alunos, fruto da resolução das tarefas, que permitiram analisar as suas aprendizagens, relativas ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A análise de dados foi efetuada tendo em conta a leitura completa das produções escritas dos alunos e o seu confronto com o quadro de análise estabelecido, e completada com a visualização dos vídeos das aulas e as notas correspondentes. O quadro de análise suportou-se em categorias preestabelecidas, baseadas no referencial teórico previamente apresentado, tendo em conta uma combinação dos diferentes autores considerados.

Deste modo, relativamente à primeira questão deste estudo — Que aspectos do pensamento algébrico revelam os alunos ao trabalhar com padrões? — as categorias definidas foram: identificar/reconhecer o motivo do padrão; estabelecer relações entre variáveis do padrão (ordem dos termos e termos); descobrir termos próximos e termos distantes; alcançar a generalização; usar símbolos.

A segunda questão do estudo — Que características dos padrões parecem ser relevantes no sucesso dos alunos? — apresenta como categorias preestabelecidas de análise as seguintes: número de elementos do motivo; simplicidade/complexidade das repetições, extensão do motivo (número de termos que o compõem).

A terceira questão do estudo — Que características da dinâmica da aula parece ter influência positiva no sucesso da exploração de padrões pelos alunos? — adota como categorias a natureza das tarefas e o modelo de ensino realizado.

4 RESULTADOS E SUA DISCUSSÃO

Na apresentação do desenvolvimento das tarefas, que segue, são incluídos como evidência pequenos excertos de transcrições de diálogos, gravados durante as aulas selecionadas, sendo as intervenções da professora identificadas com a palavra *Professora* e as das crianças com a inicial do seu nome.

4.1 Tarefa: Descobrir o motivo

A tarefa *Descobrir o motivo* foi realizada em pequenos grupos, dois grupos de quatro elementos e quatro grupos de três elementos. Numa primeira fase a professora apresentou ao grupo a tarefa em questão, começando por desenhar no quadro de giz a estrutura do padrão que se observa na Figura 2 e estabelecendo o diálogo que se lhe segue.

Figura 2 - Estrutura do padrão, previamente facultada aos alunos.

Fonte: Alves (2015, p. 95).

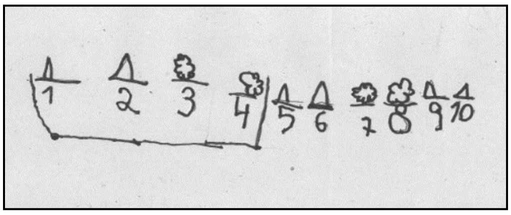
Seguidamente, a professora considerou pertinente que, em grande grupo, encontrassem um motivo que se adequasse na estrutura desenhada. De imediato um aluno disse:

> Professora: Temos aqui a estrutura de um desenho, que pode, ou não, ser a de um padrão. Eu não sei. O que eu peço para vocês descobrirem é se isto pode ser ou não um padrão, ou seja, se conseguem encontrar um motivo que encaixe nesta estrutura. Atenção! As figuras que já estão aqui desenhadas não podem sair dos seus lugares e só podem utilizar triângulos e nuvens. Percebem?
>
> Todos: Sim!
>
> T: Eu acho que nuvem-triângulo dá.
>
> Professora: Vamos experimentar!

Após a sugestão feita pelo aluno, a professora apontou para cada posição da estrutura do padrão desenhada no quadro, ao mesmo tempo em que o grande grupo verbalizava o motivo sugerido pelo colega, verificando de imediato que aquela era uma possibilidade de motivo. Posto isto, a professora incentivou o grupo a descobrir se existiriam outras possibilidades e acrescentou um pedido: identificar qual seria o 20.º termo do padrão construído com o(s) motivo(s) descoberto(s).

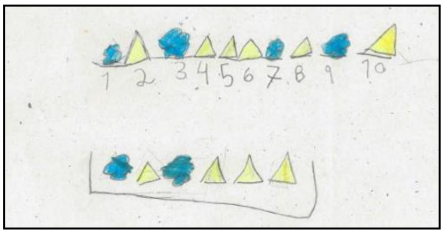
Durante a resolução da tarefa, a professora foi circulando pelos diferentes grupos e verificou que os alunos adotavam uma estratégia com base na tentativa e erro — primeiramente, escolhiam um determinado motivo e depois verificavam se este encaixava ou não na estrutura dada. É de notar que os grupos apresentaram diferentes motivos, tendo sido apresentados motivos com extensão de dois, quatro, cinco e seis termos. A maioria dos grupos encontrou um motivo com dois ou quatro termos (Figura 3), enquanto que dois grupos utilizaram um motivo com mais de quatro termos (Figura 4).

Figura 3 - Representação do motivo com quatro termos.



Fonte: Alves (2015, p. 96).

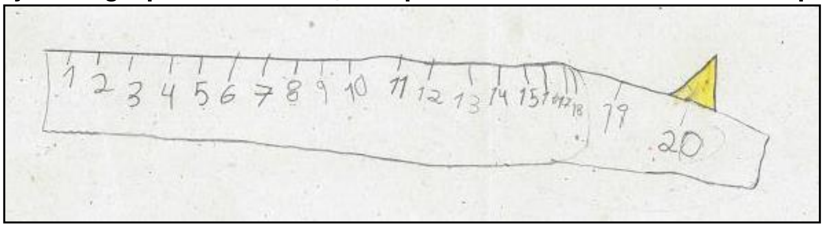
Figura 4 - Representação do motivo com seis termos.



Fonte: Alves (2015, p. 96).

Durante a resolução da segunda questão colocada — Qual o 20.º termo do padrão construído com o motivo encontrado? — a maioria dos alunos adotou uma estratégia muito expedita. Ao invés de desenharem a totalidade dos termos do padrão, como se poderia esperar, registaram uma reta com a sequência numérica dos termos, ou seja, os números até ao 20. Seguidamente, para identificar a que correspondia o 20.º termo, verbalizaram todos os elementos do padrão, ao mesmo tempo em que apontavam com o dedo para os sucessivos números escritos. Ilustramos a concretização desta estratégia com a apresentação de um grupo durante a fase de partilha dos trabalhos na turma. Escolhemos o grupo que havia adotado o motivo mais extenso, com seis termos (Figura 4), e que apresentou a sua resolução (Figura 5) apoiado no diálogo que se segue.

Figura 5 - Resolução do grupo de alunos T,B&L para encontrar o 20.º termo do padrão construído



Fonte: Alves (2015, p. 97).

Professora: Qual o 20.º termo do vosso padrão?

T: É um triângulo.

Professora: Como é que descobriram?

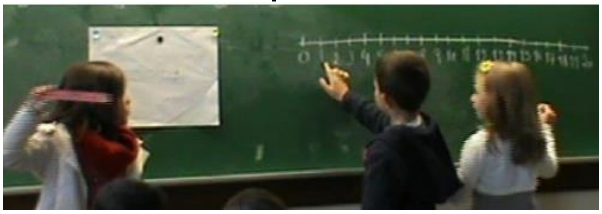
T: Com a reta.

B: Com a régua (a aluna tinha uma régua na mão).

Professora: Expliquem-nos lá como fizeram? Utilizem o quadro, porque a régua é muito pequena e não conseguimos ver.

T: Sim, está aqui uma reta (ao mesmo tempo que apontava para o quadro que se observa na Figura 6).

Figura 6 - Aluno usa a reta representada no quadro.



Fonte: Alves (2015, p. 98).

Figura 7 - Alunos verbalizam o padrão construído até ao 20.º termo.

Fonte: Alves (2015, p. 98).

B: Mas nós não usamos o zero.

Professora: Então apaguem se precisarem. Mas na vossa régua também há um zero.

B: Pois.

Professora: Expliquem lá porque é que não utilizaram o número zero?

T: Nós não utilizamos o número zero porque não era nada, porque não cabia nada.

B: Porque não há posição zero.

T: Começámos pela posição 1.

Professora: Muito bem. E como é que fizeram?

B: Nuvem, triângulo, nuvem, triângulo, triângulo, triangulo (…) (ao mesmo tempo que apontavam para a sequência dos números como se observa na Figura 7).

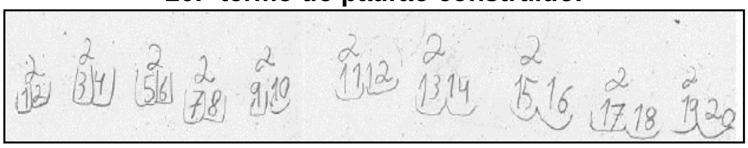
O grupo de alunos recorreu à reta numérica para representar as posições dos diferentes termos do padrão utilizando os algarismos de 1 a 20 como símbolos de cada um dos termos do padrão. Neste caso, a sequência dos números apresentados poderá simbolizar a posição de cada termo do padrão, bem como cada um dos elementos do padrão.

Contudo, houve um grupo que se distinguiu na forma de pensar. O motivo assumido por este grupo tinha uma extensão de quatro termos, com repetições consecutivas de dois elementos (Figura 8). Resolveram a segunda questão usando outra estratégia (Figura 9).

Figura 8 - Motivo encontrado pelo grupo de C,F&B.

Fonte: Alves (2015, p. 99).

Figura 9 - Resolução do grupo C,F&B para descobrir o 20.º termo do padrão construído.



Fonte: Alves (2015, p. 99).

Durante a apresentação, os alunos explicaram-se, segundo o diálogo seguinte:

> Professora: Qual é o termo que está na 20.ª posição?
>
> C: É uma nuvem.
>
> Professora: Como é que pensaram?
>
> C: Contámos de dois em dois.
>
> Professora: Mas façam lá que não estou a perceber.
>
> C: Temos dois triângulos. Depois temos duas nuvens. E aqui são triângulos e aqui nuvens (…).

Verifica-se que o grupo utilizou a contagem de dois em dois, uma vez que o motivo do seu padrão era composto por combinações de pares de dois triângulos e duas nuvens. Ao construírem o padrão, verificaram que este mudava de dois em dois, ou seja, de dois em dois termos passava para nuvem ou para triângulo. Tendo consciência desse fato, os alunos determinaram o termo distante.

Na resolução apresentada pelo grupo é evidente a utilização do algarismo 2 como representativo das combinações de pares que o motivo do seu padrão contém, ou seja, cada algarismo 2 apresentado na resolução, simboliza um par de cada elemento do padrão (um par de triângulos e/ou um par de nuvens).

4.2 Tarefa: Azulejos da cozinha

Numa primeira fase, a professora projetou no quadro interativo uma imagem dos azulejos que compunham o padrão que servia de base às questões da tarefa (Figura 10), que foi desde logo reconhecido como um friso com frutas com a ordem: maçã, uva e pera.

Figura 10: Azulejo de cozinha projetado no quadro interativo.

Fonte: Alves (2015, p. 101).

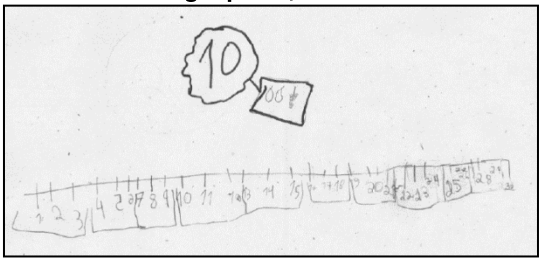
A professora partilhou com o grande grupo, oralmente, uma situação problemática:

> Professora: Quando a minha cozinha estava em obras, um dia, o pedreiro chegou ao pé da minha mãe e disse-lhe que faltavam azulejos para colocar numa das paredes da cozinha. Faltava apenas uma parede, por isso tínhamos que comprar os azulejos. O pedreiro disse à minha mãe que precisávamos de comprar 10 azulejos. Portanto, quantas maçãs, uvas e peras irão estar naquela parede?

A professora deu tempo para trabalho autônomo de realização da tarefa pelos alunos, organizados em grupos de três e quatro alunos. É importante salientar que lhe pediu que tentassem encontrar a resposta pretendida, sem recorrer ao desenho total dos termos do padrão, com o intuito de os incentivar a utilizar diferentes estratégias de raciocínio.

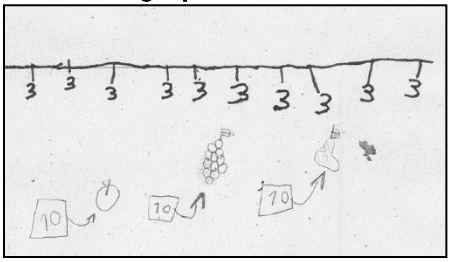
Os diversos grupos utilizaram duas estratégias distintas para resolver o problema proposto, existindo dois grupos que alcançaram a generalização do padrão. Um destes grupos recorreu à estratégia discutida na tarefa 6, recorrendo a uma reta com a escrita da sequência dos números de todas as posições dos termos do padrão até ao 30 (Figura 11). Em seguida, associou os 30 termos em grupos de 3, correspondentes a cada motivo, e indicou que existiam dez maçãs, dez peras e dez uvas.

Figura 11 - Resolução da tarefa dos azulejos, grupo M,R&F.



Fonte: Alves (2015, p. 103).

Figura 12 - Resolução da tarefa dos azulejos, grupo T,B&B.



Fonte: Alves (2015, p. 105).

Professora: O que temos aqui?

M: Os azulejos.

Professora: Onde é que estão os azulejos?

M: Aqui (ao mesmo tempo que apontava para grupos de três termos associados).

Professora: Então e quantas maçãs são precisas?

M: 10.

Professora: E peras?

R: 10

Professora: E uvas?

M: 10

Professora: e se as juntarmos todas quantas são?

M: 30 (contou os números todos que tinham escrito)

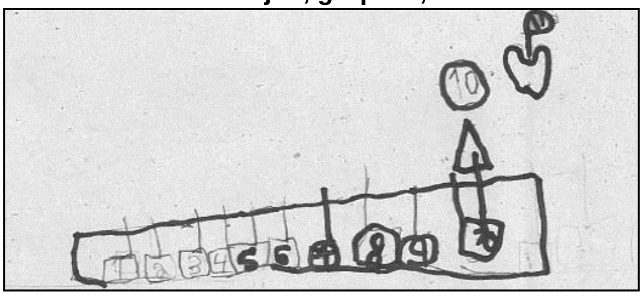
Outra estratégia foi adotada por um grupo de alunos que teve por base um pensamento estruturado e que evidenciou certezas da resposta dada. Na resolução apresentada, o grupo escreveu 10 vezes o número 3 que, por sua vez simbolizava cada repetição do motivo, assim como os três elementos diferentes que o motivo do padrão continha, nomeadamente maçã, pera e uva. Portanto, cada um dos algarismos 3 simbolizava uma maçã, uma pera e uma uva, ou seja, uma repetição do motivo.

Com base na Figura 12 e no diálogo seguinte é possível constatar esse fato.

> T: Nós fizemos grupinhos de três. As maçãs são 10, as peras também são 10 e as uvas também são 10.
>
> Professora: Por quê?
>
> B: Porque aqui está uma maçã, e aqui está outra e aqui outra (…) (à medida que ia apontando para os sucessivos números 3).
>
> Professora: E por que é que meteram sempre o número 3?
>
> B: Porque eram três coisas dentro do buraquinho.

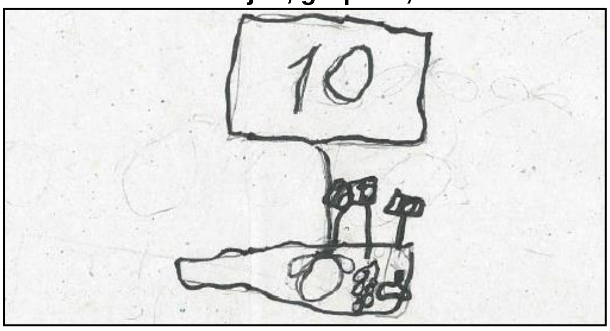
O primeiro grupo que, durante a apresentação, alcançou a generalização, estabeleceu uma relação entre o número de termos diferentes existentes num motivo e o número de motivos que o padrão continha na parede. A situação referida está patente na Figura 13 e no excerto do diálogo que se transcreve em seguida.

Figura 13 - Alcance da generalização na tarefa dos azulejos, grupo C,T&B.



Fonte: Alves (2015, p. 106).

Figura 14 - Alcance da generalização na tarefa dos azulejos, grupo M,R&F.



Fonte: Alves (2015, p. 106).

> T: Nós descobrimos que eram 10 maçãs.
>
> Professora: E como é que descobriram?
>
> C: Porque são 10 azulejos e em cada azulejo está uma maçã. Então são 10 azulejos e são 10 maçãs."
>
> Professora: Então mas vocês desenharam aí qualquer coisa.
>
> C: É uma seta a apontar 10 maçãs.
>
> Professora: E por -que é que só fizeram as maçãs?
>
> C: Porque não tivemos tempo.
>
> Professora: Mas sabem quantas peras são? E uvas?
>
> C: Então cada pera e cada uva estão no mesmo azulejo, por isso também são 10.

Na Figura 14 é possível observar o registo do outro grupo de alunos, verificando-se, através da transcrição do diálogo, que estes também alcançaram a generalização do padrão. O grupo apresentou a generalização do padrão de forma clara e concisa, demonstrando segurança e firmeza nas afirmações feitas.

> Professora: Como é que pensaram?
>
> M: Em cada azulejo há uma maçã. Há dez azulejos. Então há dez maçãs.

Ao terminar a fase de discussão, a professora passou para a sistematização das aprendizagens. Desta forma, em grande grupo, verificou-se que sempre que um motivo é constituído por elementos diferentes e que não se repetem, como o que se apresentava no azulejo, tornava-se possível concluir que o número de elementos diferentes é sempre igual ao número de vezes que o motivo se repete.

Ao longo das diferentes resoluções apresentadas pelos alunos é evidente a representação escrita de números que simbolizam aspetos diferentes do padrão. Na resolução da Figura 11 é apresentada a sequência ordenada de números e, na resolução da Figura 12, observa-se a repetição do número 3 um determinado número de vezes. No primeiro caso, os números simbolizam as posições de cada um dos termos do padrão, no entanto, no segundo caso, simbolizam cada uma das repetições do motivo, bem como cada um dos elementos que constituem o motivo.

4.3 Tarefa: Construção de padrões natalícios

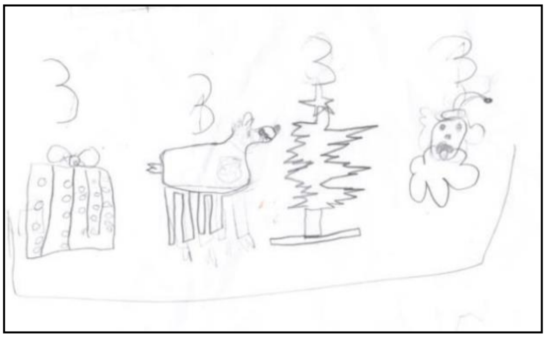
Na tarefa *Construção de padrões natalícios* os alunos tinham à sua disposição, em papel, diversas imagens natalícias disponibilizadas pela professora, como árvores de natal, bonecos de neve, sinos, pais natal, azevinhos, renas, estrelas, prendas e botas.

Numa primeira fase, a professora dialogou com o grande grupo acerca do que era pretendido, convidando-os a, em grupos de três e quatro alunos, construir padrões natalícios com as imagens facultadas. Primeiro teriam que escolher as figuras que iriam utilizar, seguidamente decidir qual o motivo do padrão que desejavam construir e, por fim, decidir quantos elementos diferentes iriam necessitar, ou seja, quantas imagens diferentes de natal iriam precisar. Posto isto, precisariam saber a quantidade de imagens necessárias para construir o seu friso natalício, com o padrão escolhido.

Após a partilha da tarefa, formaram-se os grupos e distribuíram-se as folhas brancas, nas quais iriam ser efetuados os registos necessários.

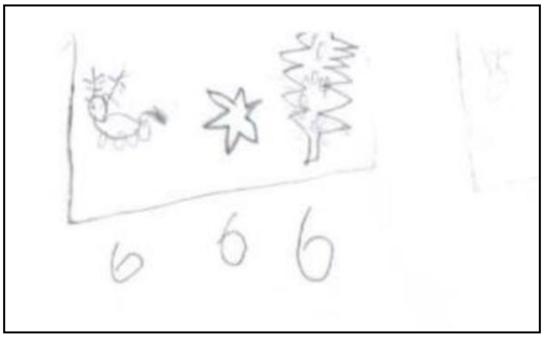
Ao longo da resolução da tarefa, a professora percebeu que a maioria dos grupos estava construindo motivos simples, apenas com três ou quatro termos e sem repetições, como é possível observar na Figura 15 e na Figura 16, onde se evidenciam motivos com quatro e com três termos, respetivamente.

Figura 15 - **Motivo com quatro elementos diferentes entre si.**



Fonte: Alves (2015, p. 114).

Figura 16 - Motivo com três elementos diferentes entre si.

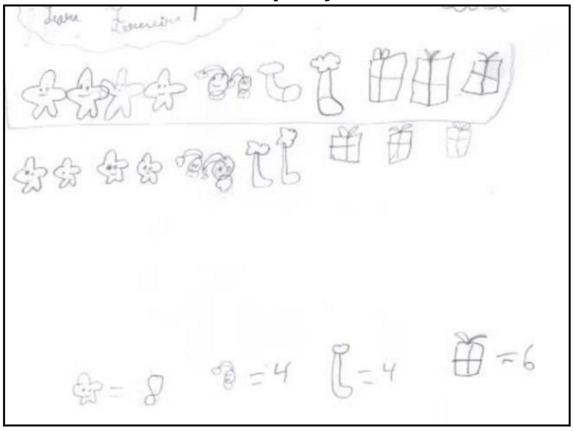


Fonte: Alves (2015, p. 114).

Os grupos que fizeram motivos que não continham figuras repetidas, para descobrirem o número de figuras diferentes que iriam precisar, não construíram o padrão na sua totalidade: apenas decidiram quantas vezes desejavam que cada um dos elementos do padrão escolhido se repetiria. Na Figura 15 é possível observar o algarismo 3 por cima de cada um dos elementos do motivo e na Figura 16 vemos o registo do algarismo 6 por baixo de cada um dos elementos. Esses algarismos simbolizam o número de repetições de cada um dos elementos ao longo do padrão. Tornou-se notório que os grupos referidos encontraram a generalização do seu padrão, verificando que o número de imagens diferentes que iriam precisar seria igual ao número de vezes que o motivo se iria repetir, e vice-versa. Portanto, ao decidirem o número de repetições do motivo ou o número de repetições dos elementos do motivo, já sabiam a quantidade de imagens diferentes que iriam precisar para construir o friso natalício que iria decorar a sala.

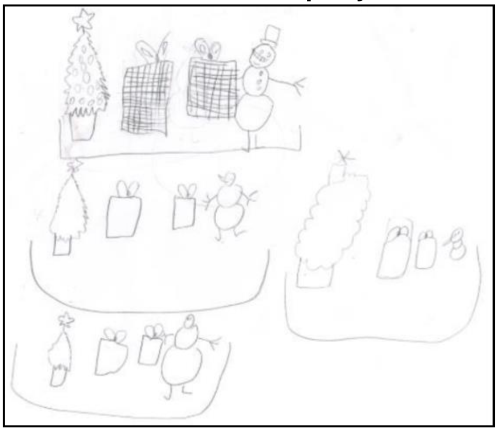
Dois dos grupos escolheram motivos que na sua composição incluíam elementos repetidos, como é possível observar nos registos efetuados por ambos, um com um motivo composto por quatro elementos com repetições com uma extensão de onze termos (Figura 17) e outro com um motivo composto por três elementos com uma extensão de quatro termos (Figura 18).

Figura 17 - Motivo composto por quatro elementos com repetições.



Fonte: Alves (2015, p. 116).

Figura 18 - Motivo composto por três elementos com repetições.



Fonte: Alves (2015, p. 116).

Como se pode observar, os dois últimos grupos referidos, para encontrarem o número de termos diferentes de que iriam necessitar para construir o friso, recorreram à estratégia de contar os diferentes termos que correspondiam a dado elemento, com base no desenho total do padrão que tinham feito na folha, não alcançando a generalização dos padrões.

5 CONCLUSÃO

Ao analisar os resultados obtidos, podemos concluir que o trabalho com padrões permitiu desenvolver nos alunos diversos aspectos do pensamento algébrico. O Quadro 2 ilustra a análise da primeira questão de investigação, segundo as categorias pré-estabelecidas, das resoluções relativas às três tarefas apresentadas.

Quadro 2 - Análise das tarefas segundo as categorias pré-estabelecidas.

Categorias análise / Tarefas	Identificar/ reconhecer o motivo do padrão	Estabelecer relações entre variáveis do padrão	Descobrir termos próximos e distantes	Alcançar a generalização	Usar símbolos
Tarefa 6: Descobrir o motivo	Construção e identificação de motivos.	- 1 grupo (motivo do padrão: AABB).	- 5 grupos (motivos dos padrões: AB; AABBB; ABABBB) - 1 grupo com motivo AABB (termo geral)	Não ocorre.	- Reta numérica simboliza sequência ordenada das posições dos termos. - O 2 simboliza a combinação de pares de dois elementos

					iguais dentro do motivo.
Tarefa 8: Azulejos da cozinha	Identificação do motivo presente no padrão facultado.	- 4 grupos (motivo do padrão: ABC). - Os restantes grupos alcançaram a resposta recorrendo à contagem dos elementos.	Não ocorre.	- 2 grupos (motivo do padrão: ABC)	-Sequência ordenada de números simboliza as posições dos termos no padrão. -O 3 simboliza cada repetição do motivo no padrão.
Tarefa 9: Construção de padrões natalícios	Construção e identificação de motivos.	- 4 grupos (motivos dos padrões: ABC; ABCD) - Os restantes grupos alcançam a resposta recorrendo à contagem dos elementos (motivos dos padrões: AAAABBCCDDEEE; ABBC)	Não ocorre.	- 4 grupos (motivos dos padrões: ABCD; ABC)	- Números simbolizam o número de repetições dos elementos no padrão.

Fonte: elaboração própria.

Ao analisar a primeira questão de investigação sobre os aspectos do pensamento algébrico que os alunos revelaram, concluímos que, nas três tarefas apresentadas, os alunos identificam com facilidade o motivo dos padrões apresentados, e conseguem construir motivos à sua escolha, com os diferentes elementos pré-definidos, como é possível observar nas tarefas *Descobrir o motivo* e *Construção de padrões natalícios.*

Nas três tarefas apresentadas, houve grupos de alunos que demonstraram estabelecer relações entre variáveis (VALE, 2012; VALE; PIMENTEL, 2011). Em *Descobrir o motivo* os alunos estabelecerem relações entre os termos do motivo e a sua ordem, verificando que existiam combinações de pares de dois elementos iguais, dentro do motivo. Nas tarefas *Azulejos da cozinha* e *Construção de padrões natalícios* os alunos estabeleceram relações entre duas variáveis, nomeadamente, entre o número de elementos diferentes, existentes no motivo do padrão e o número de repetições do motivo. A referida situação verifica-se, maioritariamente, quando os alunos se encontram perante motivos que não contêm elementos repetidos (por exemplo ABC e ABCD). Em contrapartida, quando os alunos estão perante motivos que contêm elementos repetidos, recorrem à contagem dos termos, para alcançar a resposta pretendida, como é possível observar na tarefa *Construção de padrões natalícios* (motivo ABBC). Ao nível da descoberta de termos próximos e distantes (VALE, 2012), isso só é possível observar na tarefa *Descobrir o motivo* devido às suas características, concluindo-se que a maioria dos alunos, para descobrir o 20.º termo, recorreu à contagem de todos os termos até ao pretendido, utilizando como auxílio o desenho total do padrão, até ao termo desejado, ou o registo das posições todas do padrão até à posição questionada. No entanto, um grupo de alunos não recorreu à contagem, alcançando a resposta através do estabelecimento de relações entre os termos do motivo e a sua ordem, demonstrando compreender a lei de formação do padrão (VALE; PIMENTEL, 2011).

Tendo como foco o alcance da generalização (CANAVARRO, 2009; KIERAN, 2007), pode concluir-se que esta se verifica em *Azulejos da Cozinha* (2 grupos) e em *Construção de padrões natalícios* (2 grupos). Para além disto, é importante referir que em ambas as tarefas, pelas suas características, os alunos estavam na presença de um padrão com um número definido de termos e se pretendia que descobrissem o número de elementos diferentes existentes no padrão. É ainda possível concluir que a generalização do padrão é alcançada quando os alunos estão na presença de um padrão com um motivo que não contém elementos repetidos, como se observa na tarefa *Azulejos da cozinha* e *Construção de padrões natalícios.* No que diz respeito aos símbolos, é notório o recurso a algarismos que representam diversos aspectos do padrão, nomeadamente as posições dos termos ou o número de repetições de cada elemento, como em *Construção de padrões natalícios,* ou as combinações de pares de elementos iguais, como em Descobrir *o motivo.* Nas tarefas referidas, evidencia-se a utilização de símbolos para representar ideias resultantes de um raciocínio com compreensão (KAPUT, BLANTON; MORENO, 2008), não sendo utilizados quando não são compreendidos (ARCAVI, 2006), como se observa nas resoluções de outros grupos de alunos.

Relativamente à segunda questão de investigação, sobre as características dos padrões que parecem ser relevantes, ao analisarmos os motivos dos padrões nas tarefas nas quais os alunos recorrem à contagem, concluímos que se apresentam, maioritariamente, motivos mais complexos, ou seja, com mais do que dois elementos diferentes e várias repetições (por exemplo: AABBB; ABABBB; AAAABBCCDDEEE; ABBC). As tarefas nas quais os alunos não recorrerem à contagem apresentavam motivos mais simples, no máximo com três elementos diferentes e poucas repetições (por exemplo: ABC; AABB). Torna-se possível verificar, ainda, que a identificação de um termo geral, dentro do padrão, ocorre apenas com padrões que têm motivos contendo o mesmo número de repetições de termos diferentes dentro de si, ou seja, o motivo AABB, contém tantas repetições do termo A como do termo B, e o mesmo se verifica no motivo ABC. Assim, este estudo revela que as características do motivo do padrão poderão influenciar a estratégia à qual os alunos recorrem para resolver a tarefa, bem como afetar a possibilidade do alcance da generalização do padrão.

No que concerne à terceira questão de investigação, sobre as características da dinâmica da aula que parecem ter influência positiva no sucesso da exploração de padrões, tornou-se evidente que a utilização de tarefas de natureza investigativa e exploratória desafiou os alunos (BORRALHO; BARBOSA, 2009), independentemente dos padrões serem ou não de situações do dia a dia. A natureza das tarefas criou nos alunos entusiasmo pela descoberta, levando-os a investigar a situação problemática proposta, permitindo-lhes chegar a diferentes resoluções corretas.

Para além dos aspectos referidos, a dinâmica adotada proporcionou também momentos de partilha de conhecimentos, de trabalho cooperativo, de comunicação e de discussão de resultados, como é apanágio do ensino exploratório da Matemática (CANAVARRO, 2011; CANAVARRO, OLIVEIRA; MENEZES, 2014). Muito importante foi a discussão que se estabeleceu, destacando-se a relevância das questões abertas colocadas pela professora, com vista a explorar o raciocínio dos alunos (NCTM, 2017).

Dessa forma, este estudo valida a conjectura de conteúdo e a conjectura pedagógica que estabeleceu à partida, concluindo-se que não só é importante o que deve ser ensinado, como também é essencial a forma como é ensinado.

REFERÊNCIAS

ALVES, B. **Prática de Ensino Supervisionada em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico: Desenvolver o pensamento algébrico através de padrões.** Évora: Universidade de Évora, 2015.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *In*: VALE, I; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Orgs.), **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE, p. 29-48, 2006.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, North Dartmouth, 36(5), p. 412-446, 2005.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de padrões e pensamento algébrico. *In:* VALE, I.; BARBOSA, A. (Orgs.), **Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática**. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, p. 59-68, 2009.

BORRALHO, A., CABRITA, I., PALHARES, P.; VALE, I. Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. *In:* VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, I.; SANTOS, L.; A. P. CANAVARRO (Orgs), **Números e Álgebra**. Lisboa: SEM – SPCE, p. 193-211, 2006.

CANAVARRO, A. P**.** O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, 16(2), p. 81-118, 2009.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P., OLIVEIRA, H., MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. *In:* PONTE, J.P. (Ed.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 217-233, 2014.

CRESWELL, J. **Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.** London: SAGE, 2003.

GOLDENBERG, E. P.; MARK, J.; CUOCO, A. Contemporary curriculum issues: An algebraic-habits-of-mind perspective on elementary school. **Teaching Children Mathematics**, Estados Unidos, 16(9), 2010.

GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from the learning design perspective. *In:* PLOMP T.; NIEVEEN N. (Ed.), **Educational Design Research**, Netherlands: SLO. p. 72–113, 2013.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new Algebra with understanding**, 1999. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf. Acesso em: 3 fev. 2015.

KAPUT, J. What is Algebra? What is algebraic reasoning? *In:* KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the early grades**, New York: Lawrence Erlbaum, p. 5-17, 2008.

KAPUT, J.; BLANTON, M.; MORENO, L.. Algebra from a symbolization point of view. *In:* KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the early grades**, New York: Lawrence Erlbaum Associates, p. 133-160, 2008.

KIERAN, C**.** Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, Lisboa, 16(1), p. 5-26, 2007.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar.** Lisboa: APM, 2007.

NCTM. **Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática**. Lisboa: APM, 2017.

PLOMP, T. Educational Design Research: An Introduction**.** *In:* PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Ed.), **Educational Design Research**. Netherlands: SLO, p. 10-51, 2013.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In:* GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, p.11-34, 2005.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. *In:* VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P. (Orgs.), **Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Lisboa: SEM/SPCE, p. 5-27, 2006.

PONTE, J. P. Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. *In:* VALE, I.; BARBOSA, A. (Orgs.), **Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática. Viana do Castelo:** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, p. 169-175, 2009.

PONTE, J.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M.; OLIVEIRA, P**. Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2007.

SMITH, E. Stasis and change: Integrating patterns, functions, and Algebra throughout the K-12 Curriculum. *In:* KILPATRICK, J.; MARTIN, W. G.; SCHIIFTER, D. (Eds.), **A research companion to principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, p. 136-150, 2003.

VALE, I**.** As tarefas de padrões na aula de Matemática: Um desafio para professores e alunos. **Interacções**, Campo Grande, 20, p.181-207, 2012.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. **Educação e Matemática**. Lisboa, 110, p.33-38, 2010.

VALE, I.; PIMENTEL, T. **Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico**. Lisboa: Texto, 2011.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no ensino-aprendizagem da Álgebra. *In:* VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Orgs.), **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM/SPCE, p. 193-213, 2006.